Théorème de Lax-Milgram et résolution d'une EDP.

Référence : F. Hirsch, G. Lacombe, Éléments d'analyse fonctionnelle, + H. Brezis
Leçons : (201), 205, 208, 213

Théorème Soit H un espace de Hilbert réel. Soit $a : H \times H \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire, continue et coercive, ie il existe $C, D > 0$ telles que
$$\forall x, y \in H \quad |a(x,y)| \leq C\|x\|\|y\| \quad \text{et} \quad \forall x \in H \quad a(x,x) \geq D\|x\|^2.$$
Alors, pour toute forme linéaire continue L sur H, il existe un unique $u \in H$ tel que $\forall x \in H \quad L(x) = a(u,x)$.

Démonstration

Soit $x \in H$. On pose $\varphi_x : \begin{array}{l} H \to \mathbb{R} \\ y \mapsto a(x,y) \end{array}$. Alors φ_x est une forme linéaire continue. Par le théorème de Riesz, il existe un unique $Tx \in H$ tel que
$$\left[\forall y \in H \quad a(x,y) = \langle Tx, y\rangle\right].$$
On va montrer que $T : H \to H$ est un isomorphisme. (T est clairement linéaire)

- T injectif : Soit $x \in H$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $|\langle Tx, x\rangle| \leq \|Tx\| \cdot \|x\|$, car $|\langle Tx, x\rangle| = a(x,x)$.
  Par coercivité, il vient donc $\|Tx\| \cdot \|x\| \geq D\|x\|^2 \underset{\text{si } x \neq 0}{\Rightarrow} \underbrace{\|Tx\| \geq D\|x\|.}_{\text{valide si } x=0}$

  Ainsi $\left[\forall x \in H \quad \|Tx\| \geq D\|x\|\right]$. Il est clair que si $Tx = 0$ alors $x = 0$, donc T est injective.

- T surjective : montrons que $T(H) = H$. Cela se fait en deux étapes.
  (1) $T(H)$ dense dans H : $\overline{T(H)} = H$. On utilise le critère de densité dans les Hilbert : $\overline{T(H)} = H \iff (T(H))^\perp = \{0\}$.
  Soit $y \in T(H)^\perp$. Alors en particulier $\langle Ty, y\rangle = 0$.
  Or $\langle Ty, y\rangle = \underbrace{a(y,y)}_{=0} \geq D\|y\|^2$, donc $y = 0$. Ainsi $T(H)^\perp = \{0\}$ et $T(H)$ est dense dans H.

  (2) Montrons que $T(H)$ est fermé, ie $\overline{T(H)} = T(H)$. On utilise la caractérisation séquentielle. Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in T(H)^{\mathbb{N}}$, une suite convergeant vers $y \in H$.
  Il existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H^{\mathbb{N}}$ telle que $Tx_n = y_n$.

Soit $n, m \in \mathbb{N}$. Alors $\|y_n - y_m\| = \|T(x_n - x_m)\| \geq D\|x_n - x_m\|$.
La suite $(y_n)_n$ est convergente, donc elle est de Cauchy. L'inégalité précédente montre donc que la suite $(x_n)_n$ est elle aussi de Cauchy. Or H est un Hilbert, il est donc complet, il existe $x \in H$ tel que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$.
Par continuité de T et par unicité de la limite, il vient $[y = Tx]$, donc $y \in T(H)$, $T(H)$ est fermé.

CP: $T(H) \underset{\text{fermé}}{=} \overline{T(H)} \underset{\text{dense}}{=} H$, donc T surjective.

Ainsi $T : H \to H$ est un <u>isomorphisme</u>.
L est une forme linéaire continue, donc par le théorème de Riesz il existe $v \in H$ tel que $\forall x \in H$ $L(x) = \langle v, x\rangle$. On pose $u = T^{-1}v$. $(Tu = v)$
Alors: $\forall x \in H$ $L(x) = \langle Tu, x\rangle = a(u, x)$

$\square$

<u>Remarque</u> si on pose $\Phi(x) := \frac{1}{2}a(x,x) - L(x)$, alors si a est de plus symétrique u est caractérisé par $\Phi(u) = \min_{x \in H} \Phi(x)$.
<u>Démonstration</u>
Soit $v \in H$. On écrit $v = u + w$, $w \in H$.
$$\Phi(v) = \Phi(u+w) \underset{a \text{ symétrique}}{=} \frac{1}{2}a(u,u) + \frac{1}{2}a(w,w) + a(u,w) - L(u) - L(w)$$
$$= \Phi(u) + \frac{1}{2}a(w,w) \geq \Phi(u).$$
De plus si v est aussi un minimum de Φ, alors si $w := u - v$, avec $\Phi(u) = \Phi(v)$, on obtient $a(w,w) = 0 \Rightarrow w = 0$

$\square$

Application On note $I :=]0,1[$. Soient $f \in L^2(I)$, $r \in \mathcal{C}(\bar{I})$ et $p \in \mathcal{C}^1(\bar{I})$.
On suppose que $\forall x \in I$: $|r'(x)| \leq 2$ et $p(x) \geq p_0 > 0$. Alors le problème
$$(S): \begin{cases} -(pu')' + ru' + u = f \text{ sur } I \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$
admet une unique solution faible $u \in H_0^1(I)$.
<u>Démonstration</u>
Soit u une solution classique. Alors $\forall v \in H_0^1(I)$
$$\int_I pu'v' + \int_I ru'v + \int_I uv = \int_I fv. \quad (*)$$

Si $u \in H_0^1(I)$ vérifie $(*)$ $\forall v \in H_0^1(I)$, on dit que u est solution faible.

On pose $a : H_0^1(I) \times H_0^1(I) \to \mathbb{R}$

$$(u,v) \mapsto \int_I p u' v' + \int_I r u' v + \int_I u v$$

et $L : H_0^1(I) \to \mathbb{R}$

$$v \mapsto \int_I f v .$$

- L est linéaire et continue, car $|L(v)| \leq \|f\|_2 \|v\|_2 \leq \|f\|_2 \|v\|_{H^1}$ si $v \in H_1^0$.
- a est bilinéaire (clair) et continue. En effet, si $u, v \in H^0_{1(I)}$ alors

$$|a(u,v)| \leq \|p\|_\infty \|u'\|_2 \|v'\|_2 + \|r\|_\infty \|u'\|_2 \|v\|_2 + \|u\|_2 \|v\|_2$$
$$\leq (\|p\|_\infty + \|r\|_\infty + 1) \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}$$

Montrons que a est coercive. Soit $u \in H_1^0(I)$.

$$a(u,u) = \int_I p (u')^2 + \int_I r u u' + \int_I u^2$$

or $\int_I r u u' = \left[r \frac{1}{2} u^2 \right]_0^1 - \frac{1}{2} \int_I r' u^2 = -\frac{1}{2} \int_I r' u^2$

donc $a(u,u) \underset{r' \geq -2}{\geq} p_0 \|u'\|_2 + \|u\|_2 + \|u\|_2 = p_0 \|u'\|_2 + 2 \|u\|_2$

$$\geq \underbrace{\min(p_0, 2)}_{>0} \|u'\|_{H^1}.$$

Donc a est coercive.

Par le théorème de Lax-Milgram, il existe un unique $u \in H_0^1(I)$ tel que

$\left[\forall v \in H_0^1(I) \quad a(u,v) = L(v). \right]$ (ie u est solution faible)

$\square$

Remarque On peut montrer que $u \in H^2$ et que si $f \in \mathcal{C}(\bar{I})$ alors $u \in \mathcal{C}^2(\bar{I})$ est solution classique de (S).

Soit $f \in L^2(I)$, et $u \in H_0^1(I)$ l'unique solution faible.

Pour $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(I)$, on a $\int_I p u \varphi' = \int_I (f - r u' - u) \varphi$

si $U = p u'$, alors $U \in L^2(I)$, et U a une dérivée faible égale à $-(f - r u' - u) \in L^2(I)$, donc $U \in H^1(I)$. Donc U a un représentant continu, donc $p u' = U \in \mathcal{C}(\bar{I})$. De plus $p \in \mathcal{C}(\bar{I})$, et $p(x) \geq p_0 > 0$

donc $u' = \frac{1}{p} p u' \in \mathcal{C}(\bar{I})$

et $u(x) = u(0) + \int_0^x u'(t) dt \Rightarrow | u \in \mathcal{C}(\bar{I}). |$

On continue.

Si de plus $f \in \mathcal{C}(\bar{I})$, alors la dérivée faible de pu' est

~~$-(f$~~ $-f$ $\quad -(f - ru' - u) \in \mathcal{C}(\bar{I})$

$$-(\underset{\mathcal{C}}{f} - \underset{\mathcal{C}}{ru'} - \underset{\mathcal{C}}{u})$$

On a $\quad p(x)u'(x) = p(0)u'(0) + \int_0^x -(f - ru' - u)$

$\Rightarrow pu' \in \mathcal{C}^1$

et si $p \in \mathcal{C}^1$, $u' = \frac{1}{p} pu' \in \mathcal{C}^1 \Rightarrow \boxed{u \in \mathcal{C}^2(\bar{I})}$.